


Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»**

Руководитель программы аспирантуры


В.В.Малыгина,
д.ф.м.н., профессор кафедры ВММБ

«01» июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины
«Функциональный анализ»
по программе аспирантуры**

| | |
|---|--|
| Научная специальность | 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика |
| Направленность (профиль) программы аспирантуры | Функционально-дифференциальные уравнения |
| Выпускающая(ие) кафедра(ы) | Вычислительная математика, механика и биомеханика (ВММБ) Высшая математика (ВМ) |
| Форма обучения | Очная |
| Курс: 3 | Семестр (ы): 5 |
| Виды контроля с указанием семестра: | |
| Экзамен: – | Зачёт: 5 |

Пермь 2023

1. Общие положения

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» разработана на основании следующих нормативных документов:

- Приказ Минобрнауки России от 20.10.2021 N 951 "Об утверждении федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов)";
- Постановление Правительства РФ от 30.11.2021 N 2122 "Об утверждении Положения о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре)";
- Самостоятельно устанавливаемые требования к реализуемым программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре Пермского национального исследовательского политехнического университета;
- Базовый план по программе аспирантуры;
- Паспорт научной специальности.

1.1 Цель учебной дисциплины – формирование комплекса знаний, умений и навыков в области исследования динамических систем с помощью аппарата функционального анализа.

1.2 Задачи учебной дисциплины:

• формирование знаний

- изучение основных направлений развития теории динамических систем, приводящих к операторным уравнениям, являющимся одним из основных объектов современного функционального анализа;

• формирование умений

- формирование умения проводить количественные и качественные исследования свойств решений операторных уравнений, к которым сводятся функционально-дифференциальные уравнения;

• формирование навыков

- формирование навыков применения аналитического аппарата функционального анализа для решения и качественного исследования функционально-дифференциальных уравнений.

1.3 Предметом освоения дисциплины являются следующие объекты:

- абстрактные векторные и функциональные пространства;
- операторы и операторные уравнения.

1.4 Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Функциональный анализ» является обязательной дисциплиной вариативной части цикла базового учебного плана.

Дисциплина используется при подготовке к сдаче кандидатского экзамена по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика» и выполнении научно-квалификационной работы (диссертации).

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате изучения дисциплины аспирант должен демонстрировать следующие результаты:

Знать:

- постановки основных задач теории динамических систем, моделируемых посредством операторных уравнений;
- основные идеи и результаты функционального анализа как аппарат исследования функционально-дифференциальных уравнений.

Уметь:

- выделять формальную составляющую в любых динамических процессах, интерпретируя их как абстрактную математическую структуру;
- интерпретировать динамические системы в виде операторных уравнений в правильно выбранном функциональном пространстве;
- классифицировать задачи для операторных уравнений по свойствам и методам исследования.

Владеть:

- основными аналитическими методами решения и исследования операторных уравнений в абстрактных пространствах;
- техникой перехода от абстрактных функционально-аналитических структур к конкретным математическим моделям

3. Структура учебной дисциплины по видам и формам учебной работы

Таблица 1

Объем и виды учебной работы

| № п.п. | Вид учебной работы | Трудоемкость, ч |
|--------|---------------------------------------|-----------------|
| | | 5 семестр |
| 1 | Аудиторная работа | 17 |
| | В том числе: | |
| | Лекции (Л) | 5 |
| | Практические занятия (ПЗ) | 6 |
| | Контроль самостоятельной работы (КСР) | 6 |
| 2 | Самостоятельная работа (СР) | 55 |
| | Форма итогового контроля: | Зачет |

4. Содержание учебной дисциплины

4.1. Содержание разделов и тем учебной дисциплины

Раздел 1. Элементы теории функции вещественной переменной (Л –2, ПЗ–0, СР – 8)

Тема 1. Мера Лебега. Измеримые множества в конечномерных пространствах. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

Тема 2. Функции ограниченной вариации. Интеграл Стильтеса. Абсолютно непрерывные функции.

Раздел 2. Метрические, нормированные и гильбертовы пространства (Л –2, ПЗ–0, СР – 8)

Тема 3. Метрические и нормированные пространства. Полнота, сепарабельность, компактность. Принцип сжимающих отображений.

Тема 4. Гильбертовы пространства. Ортогональность. Теорема о разложении в прямую сумму ортогональных подпространств. Изоморфизм бесконечномерных гильбертовых пространств.

Раздел 3. Линейные операторы (Л –2, ПЗ–1, СР – 8)

Тема 5. Пространство линейных ограниченных операторов. Непрерывность и ограниченность. Сильная и слабая сходимость. Теорема Банаха–Штейнхауса.

Тема 6. Пространство линейных ограниченных функционалов. Общий вид функционалов в гильбертовых и конечномерных пространствах. Теорема Банаха–Хана.

Раздел 4. Линейные операторы (продолжение) (Л –0, ПЗ–2, СР – 10)

Тема 7. Обратные операторы. Теорема Неймана. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента.

Тема 8. Компактные операторы. Сопряженные операторы. Теоремы Фредгольма.

Тема 9. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта–Шмидта.

Тема 10. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.

Раздел 5. Пространства обобщенных функций (Л –0, ПЗ–1, СР – 9)

Тема 11. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.

Тема 12. Пространства Соболева W_p . Теоремы вложения.

Раздел 6. Топологические пространства и нелинейные уравнения (Л –0, ПЗ–2, СР – 12)

Тема 13. Топологические пространства. Окрестности. Базы. Отделимость. Открытые и замкнутые множества в топологических пространствах.

Тема 14. Операторы в топологических пространствах. Непрерывность. Компактность. Теорема Кантора.

Тема 15. Теорема Шаудера. Решение нелинейных операторных уравнений.

4.2. Перечень тем практических занятий

Таблица 2

Темы практических занятий

| № п.п. | Номер темы дисциплины | Наименование темы практического занятия | Наименование оценочного средства | Представление оценочного средства |
|--------|-----------------------|---|------------------------------------|--|
| 1 | 7 | Обратные операторы. Теорема Неймана. | Собеседование. Творческое задание. | Вопросы по темам / разделам дисциплины. Темы творческих заданий. |
| 2 | 9 | Компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. | Собеседование. Творческое задание. | Вопросы по темам / разделам дисциплины. Темы творческих заданий. |
| 3 | 11 | Обобщенные функции | Собеседование | Вопросы по темам / разделам дисциплины. |
| 4 | 13 | Топологические пространства. | Собеседование | Вопросы по темам / разделам дисциплины. |
| 5 | 14 | Компактность в | Собеседование. | Вопросы по |

| | | | | |
|--|--|------------------------------|---------------------|--|
| | | топологических пространствах | Творческое задание. | темам / разделам дисциплины. Темы творческих заданий. |
|--|--|------------------------------|---------------------|--|

4.3. Содержание самостоятельной работы аспирантов

Самостоятельная работа аспирантов заключается в теоретическом изучении конкретных вопросов и выполнении творческих заданий.

Таблица 3

Темы самостоятельных заданий

| № п.п. | Номер темы дисциплины | Наименование темы самостоятельной работы | Наименование оценочного средства | Представление оценочного средства |
|--------|-----------------------|--|--------------------------------------|---|
| 1 | 1 | Измеримые функции. Интеграл Лебега. | Собеседование | Вопросы по темам / разделам дисциплины |
| 2 | 2 | Интеграл Стильтеса. | Творческое задание | Темы творческих заданий |
| 3 | 4 | Изоморфизм бесконечномерных гильбертовых пространств. | Собеседование | Вопросы по темам / разделам дисциплины |
| 4 | 6 | Общий вид функционалов в различных пространствах. | Творческое задание | Темы творческих заданий |
| 5 | 7 | Теорема Банаха об обратном операторе. | Собеседование | Вопросы по темам / разделам дисциплины |
| 6 | 9 | Теорема Гильберта–Шмидта. | Творческое задание | Темы творческих заданий |
| 7 | 10 | Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра. | Собеседование | Вопросы по темам / разделам дисциплины |
| 8 | 11 | Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье. | Творческое задание | Темы творческих заданий |
| 9 | 12 | Теоремы вложения. | Собеседование | Вопросы по темам / разделам дисциплины |
| 10 | 13 | Открытые и замкнутые множества в топологических пространствах. | Творческое задание | Темы творческих заданий |
| 11 | 14 | Операторы в топологических пространствах. Непрерывность. | Собеседование. Творческое задание | Вопросы по темам / разделам дисциплины Темы творческих заданий |
| 12 | 15 | Решение нелинейных операторных уравнений. | Собеседование. Творческое задание | Вопросы по темам / разделам дисциплины Темы творческих заданий |

5. Методические указания для аспирантов по изучению дисциплины

При изучении дисциплины «Функциональный анализ» аспирантам целесообразно выполнять следующие рекомендации:

1. Изучение учебной дисциплины должно вестись систематически;
2. После изучения какого-либо раздела по учебнику или конспектным материалам рекомендуется по памяти воспроизвести основные термины, определения, понятия раздела;
3. Вся тематика вопросов, изучаемых самостоятельно, задается преподавателем. Им же даются источники (в первую очередь вновь изданные в периодической научной литературе) для более детального понимания вопросов, озвученных на лекции;
4. К выполнению практических заданий приступать после самостоятельной работы по изучению теоретических вопросов.

6. Перечень учебно-методического и информационного обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

| № | Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц) | Количество экземпляров в библиотеке+кафедре; местонахождение электронных изданий |
|--------------------------------------|--|--|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 Основная литература | | |
| 1 | <i>Треногин, Владилен Александрович. Функциональный анализ : в 2 томах : учебное пособие для вузов / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева .— Москва : Академия, 2012 .— (Высшее профессиональное образование, Естественные науки) (Бакалавриат) .— ISBN 978-5-7695-9138-9. Т. 1 .— 2012 .— 240 с.</i> | 6 |
| 2 | <i>Треногин, Владилен Александрович. Функциональный анализ : в 2 томах : учебное пособие для вузов / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева .— Москва : Академия, 2012 .— (Высшее профессиональное образование, Естественные науки) (Бакалавриат) .— ISBN 978-5-7695-9138-9. Т. 2 .— 2013 .— 231 с.</i> | 6 |
| 2 Дополнительная литература | | |
| 2.1 Учебные и научные издания | | |
| 1 | <i>Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин ; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова .— 7-е изд .— Москва : Физматлит, 2006.— 570 с.</i> | 60 |
| 2 | <i>Люстерник, Лазарь Аронович. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев .— 2-е изд., стер .— Санкт-Петербург : Лань, 2009 .— 271 с.</i> | 27 |
| 3 | <i>Теория оптимального управления : учебное пособие для вузов / Пермский государственный университет .— Пермь : Изд-во ПГУ, 2009-2010. Ч. 1: Элементы функционального анализа. Элементы теории меры и интеграла Лебега. Гильбертовы пространства / П. М. Симонов .— 2009 .— 154 с.</i> | 5 |
| 2.2 Периодические издания | | |
| 1 | <i>Известия вузов. Математика http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=ivm&option_lang=rus</i> | Общероссийский математический портал |

| № | Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц) | Количество экземпляров в библиотеке+кафедре; местонахождение электронных изданий |
|---|---|--|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | Дифференциальные уравнения http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=de&option_lang=rus | Общероссийский математический портал |

6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

6.2.1. Лицензионные ресурсы¹

1. Электронная библиотека Пермского национального исследовательского политехнического университета [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных электрон. док., издан. в Изд-ве ПНИПУ] / Перм. нац. исслед. политехн. ун-т, Науч. б-ка. – Пермь, 2016. – Режим доступа: <http://elib.pstu.ru>, свободный. – Загл. с экрана.

2. Электронно-библиотечная система Издательство «Лань» [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : электрон. версии кн., журн. по гуманит., обществ., естеств. и техн. наукам] / Электрон.-библ. система «Изд-ва «Лань». – Санкт-Петербург, 2010-2016. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

3. ProQuest Dissertations & Theses Global [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : дис. и дипломные работы на ин. яз. по всем отраслям знания] / ProQuest LLC. – Ann Arbor, 2016. – Режим доступа: <http://search.proquest.com/pqdtglobal/dissertations>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

4. Электронная библиотека диссертаций РГБ [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : электрон. версии дис. и автореф. дис. по всем отраслям знания] / Электрон. б-ка дис. – Москва, 2003-2016. – Режим доступа: <http://diss.rsl.ru>, компьютер. сеть Науч. б-ки Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

5. Cambridge Journals [Electronic resource : полнотекстовая база данных : электрон. журн. по гуманит., естеств., и техн. наукам на англ. яз.] / University of Cambridge. – Cambridge : Cambridge University Press, 1770-2012. – Режим доступа: <http://journals.cambridge.org>. – Загл. с экрана. 11.

6. ScienceDirect [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : электрон. науч. журн. и кн. по обществ., естеств. и техн. наукам на англ. яз.] / Elsevier B. V. – Amsterdam, 2016. – Режим доступа: <http://www.sciencedirect.com>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

7. Springer [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : электрон. журн., кн. по гуманит., обществ., естеств. и техн. наукам, протоколы исследований на англ. и нем. яз.] / Springer International Publishing AG, Part of Springer Science+Business

¹ собственные или предоставляемые ПНИПУ по договору

Media. – Cham, 2016. – Режим доступа: <http://link.springer.com>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

8. zbMATH [Электронный ресурс] : [реф.-библиограф. и аналит. база данных по математике на англ. яз.] / FIZ Karlsruhe GmbH. – Berlin, 2016. – Режим доступа: <https://zbmath.org>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

6.2.2. Открытые интернет-ресурсы

1. Пермский семинар по функционально-дифференциальным уравнениям - <http://fde-perm.livejournal.com/>

2. Общероссийский математический портал - <http://www.mathnet.ru/>

3. Московский центр непрерывного математического образования – <http://www.mccme.ru/>

7. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

7.1. Специализированные лаборатории и классы

Не используется.

7.2. Основное учебное оборудование

Специальное оборудование не требуется.

8. Фонд оценочных средств

Освоение учебного материала дисциплины запланировано в течение одного семестра. Предусмотрены аудиторные лекционные занятия, практические занятия, а также самостоятельная работа аспирантов. Формой контроля освоения результатов по дисциплине является зачет, проводимый с учетом результатов текущего контроля.

Перечень контролируемых результатов обучения по дисциплине

Таблица 4

| Контролируемые результаты обучения по дисциплине (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций) | Вид контроля | |
|---|--------------|-----------------------|
| | Текущий | Промежуточный (зачёт) |
| Усвоенные знания | | |
| З.1 знать постановки основных задач теории динамических систем, моделируемых посредством операторных уравнений | С | ТВ |
| З.2 знать основные идеи и результаты функционального анализа как аппарат исследования функционально-дифференциальных уравнений | С | ТВ |
| Освоенные умения | | |
| У.1 уметь выделять формальную составляющую в любых динамических процессах, интерпретируя их как абстрактную математическую структуру | ОТЗ | ПЗ |
| У.2 уметь интерпретировать динамические системы в виде операторных уравнений в правильно выбранном функциональном пространстве | ОТЗ | ПЗ |
| У.3 уметь классифицировать задачи для операторных уравнений по свойствам и методам исследования | ОТЗ | ПЗ |
| Приобретенные владения | | |
| В.1 владеть основными аналитическими методами решения и исследования операторных уравнений в абстрактных | ОТЗ | ПЗ |

| | | |
|--|-----|----|
| пространствах | | |
| В.2 владеть техникой перехода от абстрактных функционально-аналитических структур к конкретным математическим моделям | ОТЗ | ПЗ |

С – собеседование по теме; ТВ – теоретический вопрос; ТЗ – творческое задание с учетом темы научно-исследовательской деятельности; ОТЗ – отчет по творческому заданию; ПЗ – практическое задание с учетом темы научно-исследовательской деятельности.

Собеседование – средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с аспирантом на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.

Творческое задание - частично регламентированное задание, имеющее нестандартное решение и позволяющее диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.

Итоговой оценкой освоения дисциплинарных частей компетенций (результатов обучения по дисциплине) является промежуточная аттестация в виде зачета, проводимая с учетом результатов текущего контроля.

Контроль качества освоения дисциплины включает в себя текущий контроль успеваемости и промежуточную аттестацию аспирантов.

8.1. Текущий контроль

Текущий контроль успеваемости обеспечивает оценку освоения дисциплин и проводится в форме собеседования и защиты отчета о творческом задании.

• Собеседование

Для оценки **знаний** аспирантов проводится собеседование в виде специальной беседы преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной для выяснения объема знаний по определенному разделу, теме, проблеме.

Собеседование может выполняться в индивидуальном порядке или группой аспирантов.

• Защита отчета о творческом задании

Для оценки **умений и владений** аспирантов используется творческое задание, имеющее нестандартное решение и позволяющее интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.

Творческие задания могут выполняться в индивидуальном порядке или группой аспирантов.

8.2. Промежуточная аттестация

Допуск к промежуточной аттестации осуществляется по результатам текущего контроля. Промежуточная аттестация проводится в виде зачета в устно-письменной форме по билетам. Билет содержит теоретические вопросы (ТВ) для проверки знаний и практическое задание (ПЗ) для проверки умений и владений заявленных дисциплинарных частей компетенций.

Билет формируется таким образом, чтобы в него попали вопросы и практические задания, контролирующие уровень сформированности всех заявленных дисциплинарных компетенций. Пример билета представлен в приложении 1.

Типовые шкалы и критерии оценки результатов обучения при сдаче зачета для компонентов *знать, уметь и владеть* приведены в табл. 5.

Шкала оценивания уровня знаний, умений и владений на зачете

| Оценка | Критерии оценивания |
|-------------------|---|
| <i>Зачтено</i> | <p>Аспирант продемонстрировал сформированные или содержащие отдельные пробелы знания при ответе на теоретический вопрос билета. Показал сформированные или содержащие отдельные пробелы знания в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов правильно.</p> <p>Аспирант выполнил контрольное задание билета правильно или с небольшими неточностями. Показал успешное или сопровождающееся отдельными ошибками применение навыков полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов правильно.</p> |
| <i>Не зачтено</i> | <p>При ответе на теоретический вопрос билета аспирант продемонстрировал фрагментарные знания. При ответах на дополнительные вопросы было допущено множество неправильных ответов.</p> <p>При выполнении контрольного задания билета аспирант продемонстрировал частично усвоенное умение и применение полученных навыков при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы было допущено множество неточностей.</p> |

9. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине

Задания для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены на оценивание:

1. уровня освоения теоретических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности аспиранта применять теоретические знания и профессионально значимую информацию и оценивание сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Задания для оценивания когнитивных умений (знаний) должны предусматривать необходимость проведения аспирантом интеллектуальных действий:

- по дифференциации информации на взаимозависимые части, выявлению взаимосвязей между ними и т.п.;
- по интерпретации и творческому усвоению информации из разных источников, ее системного структурирования;
- по комплексному использованию интеллектуальных инструментов учебной дисциплины для решения учебных и практических проблем.

При составлении заданий необходимо иметь в виду, что они должны носить практико-ориентированный комплексный характер и формировать закрепление осваиваемых компетенций.

10. Типовые контрольные вопросы и задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

10.1 Типовые творческие задания:

1. Провести сравнение определения непрерывного отображения в топологических; метрических; конечномерных пространствах.

2. Проследить эволюцию теоремы о вложенных шарах в: а) метрических; б) нормированных; в) гильбертовых пространствах.

3. Дать описание общего вида линейных непрерывных функционалов в пространствах $L_p[a, b]$ и l_p , где $1 < p < \infty$.

4. Найти критерии компактности множества в пространствах суммируемых последовательностей.

5. Провести сравнение равномерной и поточечной сходимости в пространствах линейных ограниченных операторов с учетом полноты/неполноты пространств, в которых действуют операторы.

10.2. Типовые контрольные вопросы для оценивания знаний на зачете по дисциплине:

1. Теорема о вложенных шарах в метрических пространствах.

2. Теорема Банаха–Штейнхауса.

3. Теорема Банаха–Хана.

4. Теорема Банаха об обратном операторе.

5. Спектр и резольвента линейных ограниченных операторов. Теорема о непустоте спектра.

10.3. Типовые контрольные задания для оценивания приобретенных умений и владений на зачете по дисциплине:

1. Применяя любую теорему о неподвижной точке, найти условие разрешимости (в частности, однозначной) уравнения $x(t) = \int_a^b K(t, s)x^n(s)ds + f(t)$ в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций. Показатель $n \in \mathbb{N}$.

2. В пространстве $L_2[0, 1]$ найти проекцию элемента $x(t) = t^3$ на подпространство многочленов степени не выше двух.

3. В пространстве непрерывных на $[0, \infty)$ функций со скалярным произведением $(x, y) = \int_0^\infty x(t)y(t)e^{-t} dt$ ортогонализацию системы $1, t, t^2, \dots$. Доказать, что в результате получатся ортогональные многочлены Чебышева–Лагерра.

4. Применяя принцип сжимающих отображений, доказать, что при $0 \leq a \leq 1$ итерации $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a)$, $x_0 = 0$ сходятся к \sqrt{a} . Дать оценку скорости сходимости.

Полный комплект вопросов и заданий для сдачи зачета в форме утвержденных билетов хранится на кафедре «Вычислительная математика, механика и биомеханика».

Дисциплина
«Функциональный анализ»

БИЛЕТ № 1

1. Теорема Банаха об обратном операторе.
2. Доказать, что в пространстве линейных ограниченных операторов множество компактных операторов замкнуто.
3. Применяя любую теорему о неподвижной точке, найти условие разрешимости (в частности, однозначной) уравнения $x(t) = \int_a^b K(t, s)x^n(s)ds + f(t)$ в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций. Показатель $n \in \mathbb{N}$.

Заведующий кафедрой ВММБ _____

(подпись)

Столбов В.Ю.

« ____ » _____ 202 ____ г.

Лист регистрации изменений

| № п.п. | Содержание изменения | Дата, номер протокола заседания кафедры. Подпись заведующего кафедрой |
|-------------------|-----------------------------|--|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |